КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ АЛЬ-ФАРАБИ

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ТЕПЛОФИЗИКИ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

3D моделирование физических процессов

Классификация дифференциальных уравнений. Основные понятия и обозначения теории разностных схем.

Лектор: PhD
Максимов Валерий Юрьевич

Классификация дифференциальных уравнений

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) и дифференциальные уравнения в частных производных (ДУЧП).

Одномерное ур-е погр. слоя:

$$\rho u \frac{du}{dx} = -\frac{dp}{dx} + \xi \frac{\rho u^2}{2d}, \quad u(x), p(x) \qquad \textbf{(1)}$$

Двумерное ур-е погр. слоя:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \upsilon \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad u(x,y), p(x,y) \qquad \textbf{(2)}$$

Волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial t^2}, \qquad \upsilon(x,t) \qquad \textbf{(3)}$$

Классификация ДУ

2. Порядок ДУ

ДУ II порядка в общем случае:

$$A\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + D\frac{\partial f}{\partial x} + E\frac{\partial f}{\partial y} + Ff = G \qquad \mathbf{(4)}$$

A, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G* – константы или известные функции *x*, *y*

3. Тип ДУ II порядка:

$$B^2\text{-}4AC \begin{cases} <0 \text{ – ДУ (4) } \textbf{\textit{эллиптического}} \text{ типа;} \\ =0 \text{ – ДУ (4) } \textbf{\textit{параболического}} \text{ типа;} \\ >0 \text{ – ДУ (4) } \textbf{\textit{гиперболического}} \text{ типа.} \end{cases}$$

Классификация ДУ

Примеры ДУ II порядка:

Уравнение Пуассона:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -q(x, y)$$

$A=1, B=0,\ C=1,$

$B^2-4AC = -4<0$ **(5)**

Уравнение Трикоми:

$$x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \sin x$$

$A=x, B=0,\ C=1,$

$B^2-4AC = -4x$ **(6)**

(3) $\Rightarrow$ $$\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial t^2} = 0$$

$A=1, B=0,\ C= -1/c^2,$ **(7)**

$B^2-4AC = 4/c^2>0$

(2)=?

Тип ДУ II порядка определяется только коэффициентами при вторых производных

Классификация ДУ

4. Линейность:

зависимая переменная и все ее производные входят в ДУ линейным образом:

не умножаются друг на друга

не возводятся в степень

не являются аргументами трансцендентных функций (sin, cos, tg, ctg, arcsin, arccos, lg, ln, exp)

Линейные уравнения: (3),(4),(5),(6)

Нелинейные уравнения: (1),(2)

Большинство ДУ, описывающих физические процессы, нелинейные

Классификация ДУ

<u>5. Однородность :</u>

дифференциальное уравнение называется *однородным*, если оно не имеет членов, содержащих неизвестную

Уравнение (4) однородное при *G=0* и неоднородное при *G≠0*

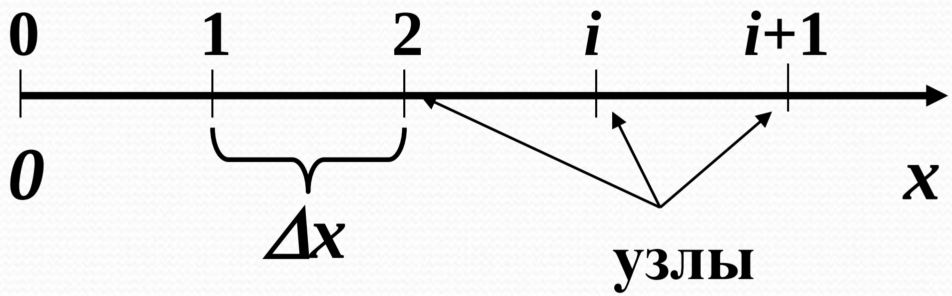
В неоднородных уравнениях выражение,

не содержащее неизвестную, как правило,

имеет смысл источникового члена.

Основные понятия и обозначения теории разностных схем

f(x) **– точное решение ДУ,** ***f*** **– функция непрерывного аргумента**



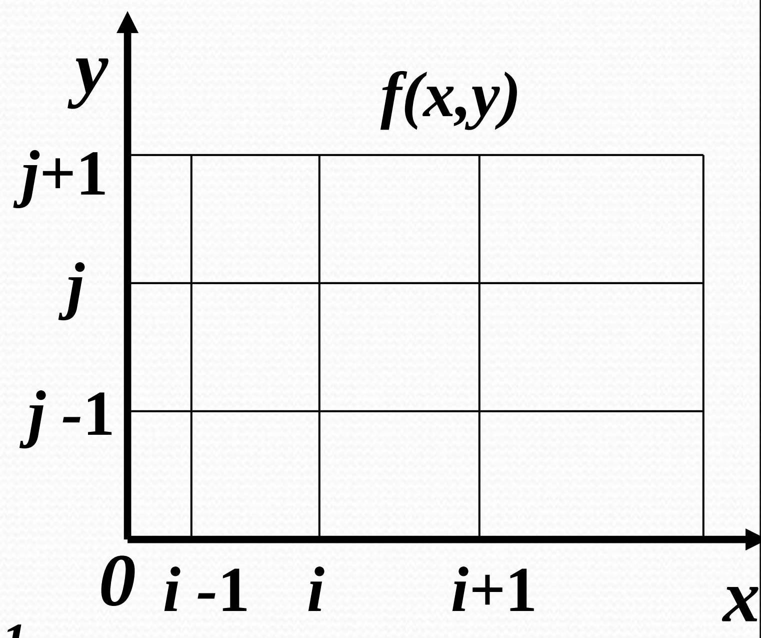
Расстояния между узлами – шаги: Δx

совокупность узлов составляет сетку

Δx **=const** | Δx **≠const**

равномерная | **неравномерная**

$\Delta y = y_{j+1} - y_j = y_j - y_{j-1}$, $\Delta x = x_{i+1} - x_i \neq x_i - x_{i-1}$



Основные понятия и обозначения теории разностных схем

Функция, определенная на множестве узлов конечно-разностной сетки, называется *сеточной функцией* f_Δ

В одномерном случае $f_\Delta = f(x_i)$, в двумерном случае $f_\Delta = f(x_i, y_j)$

Производные ⇒ **Приближенные алгебраические соотношения (конечно-разностные аналоги)**

ДУ ⇒ **алгебраическое конечно-разностное уравнение(КРУ)**

f — **точное решение ДУ** ⇒ **Приближенное решение ДУ**

f_Δ — **точное решение КРУ**

?

Основные понятия и обозначения теории

Конечно разностная схема (КРС) – это система дискретных алгебраических уравнений, аппроксимирующих дифференциальное уравнение с соответствующими граничными условиями.

***Совокупность узлов сетки*, используемых при построении КРС, называется шаблоном.**

В дальнейшем мы будем использовать следующее модельное уравнение - **Уравнение Бюргерса:**

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} = a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \; f(t, x) \qquad (8)$$

Это уравнение выбрано потому, что оно учитывает локальное изменение искомой функции во времени (первое слагаемое в левой части), конвективный перенос (второе слагаемое в левой части) и молекулярный перенос (член в правой части уравнения). Коэффициент *a* равен кинематической вязкости ν, если *f* представляет собой скорость υ, коэффициенту диффузии *D*, если *f* является концентрацией *c*, и, наконец, это будет коэффициент температуропроводности, если *f* есть температура *T*. В последнем случае можно сказать, что при $f \equiv T$ уравнение (8) описывает *нестационарный процесс изменения температуры в одномерном канале при течении в нем жидкости с постоянной скоростью u*.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} = a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \; f(t, x) \qquad \mathbf{(8)}$$